Text aus dem Buch: Kuhn, Mechanik

5.3 Messung der Gravitationskonstanten

Wir wollen einen Schulversuch zur Messung der Gravitationskonstanten beschreiben.

Wir verwenden eine Drehwaage in moderner Ausführung (Abb. 172). Das Gehäuse, das die Vorrichtung vor äußeren Einflüssen schützt, ist auf der Vorder- und Rückseite mit Glasplatten versehen, so daß man die Anordnung gut sehen kann. Zur Messung der sehr kleinen Ausschläge benutzt man einen sogenannten Lichtzeiger. Die Stange, die an ihren Enden die kleinen Bleikugeln hält und in der Mitte am Torsionsdraht aufgehängt ist, trägt einen kleinen Hohlspiegel. Auf ihn richtet man von einer Lampe her ein Lichtbündel und läßt es auf eine weit entfernte Skala reflektieren, wo es eine scharfe Lichtmarke erzeugt. Der lange Lichtstrahl bildet einen Zeiger, der auch bei sehr kleinen Drehungen der Waage einen erkennbaren und ablesbaren Ausschlag auf der Skala liefert.

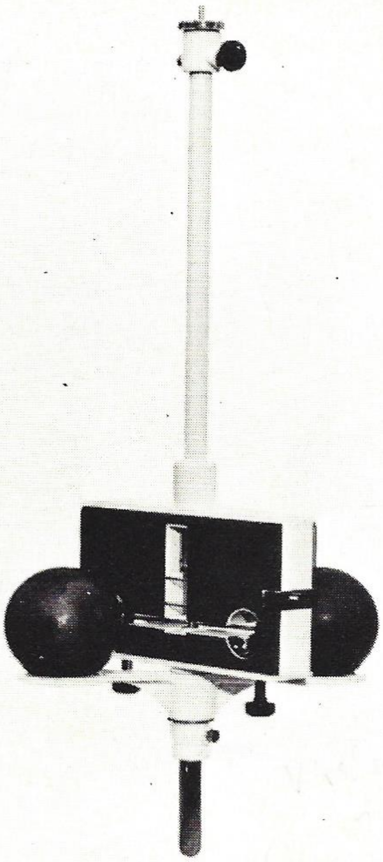


Abb. 172. Gravitationsdrehwaage

Zunächst müssen wir die Eigenschaften der Drehwaage näher kennen. Die kleinen Bleikugeln haben die Masse m, die Entfernung vom Mittel- und Aufhängepunkt des Gehänges sei e. Messen läßt sich die Masse der großen Bleikugeln M und ihr Durchmesser d. Die Breite des Gehäuses, an das die großen Kugeln anliegen, ist b. Die Entfernung der Kugeln (von Mittelpunkt zu Mittelpunkt) ist dann $r = \frac{d+b}{2}$, wenn sich die kleinen Kugeln genau in der Mitte des Gehäuses befinden (Abb. 173,1). Die Anziehungskraft zwischen den Kugeln beträgt:

$$F_1 = f\,\frac{M\,m}{r^2}\,.$$

Die kleinen Kugeln werden aber auch von den anderen großen Kugeln beeinflußt. Die Anziehungskraft zwischen ihnen beträgt:

$$F_2' = f\,\frac{M\,m}{x^2}\,,$$

wenn x ihre gegenseitige Entfernung ist, die man nach dem Satz des Pythagoras aus $x^2 = 4\,e^2 + r^2$ berechnen kann. Diese Kraft wirkt in Richtung der Verbindungslinie der Kugeln. Wirksam für die Bewegung der kleinen Kugeln wird davon nur die Komponente senkrecht zu e. Sie beträgt $F_2 = F_2' \cos\alpha$. $\cos\alpha$ berechnet sich aus $\cos\alpha = r/x$. Damit erhält man:

$$F_2 = f\,\frac{M\,m\,r}{x^3}\,.$$

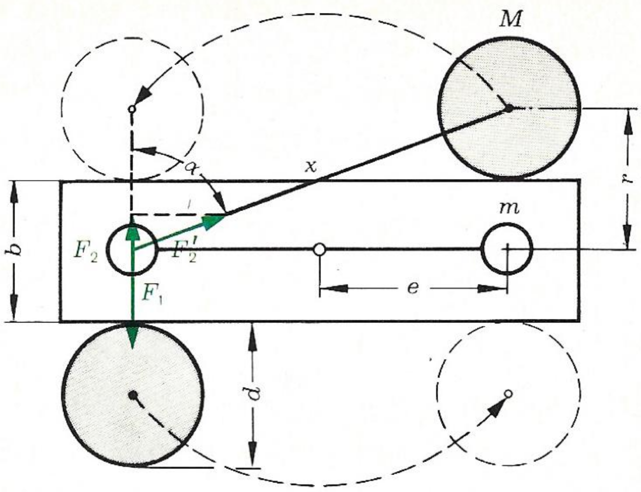
Diese Kraft wirkt F_1 entgegen, so daß die Gesamtkraft entsteht:

$$F = F_1 - F_2 = f\,\frac{M\,m}{r^2} - f\,\frac{M\,m\,r}{x^3} = f\,\frac{M\,m}{r^2}\left(1 - \frac{r^3}{x^3}\right).$$

Diese Kraft F wirkt auf jede kleine Kugel, dadurch wird der Torsionsfaden verdrillt, bis Gleichgewicht herrscht. Wenn man die großen Kugeln entfernt, entdrillt sich der Faden wieder und übt dabei im ersten Augenblick auf die Kugeln die Kraft F aus. Beim Entdrillen des Fadens läßt diese Kraft langsam nach.

Wenn man die großen Kugeln herumschwenkt (in die gestrichelt gezeichnete Lage, Abb. 173,1), wirkt auf jede Kugel die entgegengesetzt gerichtete Anziehungskraft wie vorher. Daher steht jede kleine Kugel unter dem Einfluß der

Abb. 173,1. Abmessungen und Kräfte bei der Gravitationsdrehwaage



Kraft $2F$, einmal vom verdrillten Faden her, zum anderen von der Anziehungskraft der großen Kugeln. Unter Einfluß dieser Kraft $2F$ führen die kleinen Kugeln eine beschleunigte Bewegung aus. Wir wollen die Kraft als konstant annehmen (in Wirklichkeit nimmt sie, wie wir sahen, ab), um die Rechnung einfacher zu gestalten. Im Anfang der Bewegung ist dies genähert der Fall. Die Beschleunigung ist dann nach der mechanischen Grundgleichung $a = 2F/m$. Der zurückgelegte Weg wird

$$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = F\,t^2/m.$$

Diesen Weg können wir nicht direkt messen, da er viel zu klein ist. Aber wir haben ja die Lichtzeigerablesung. Der Lichtstrahl, der von der Lampe kommt, wird vom Spiegel auf die Wand reflektiert, die sich in der Entfernung L befindet. Wenn sich die Drehwaage um einen Winkel φ dreht, wobei $\varphi = s/e$ ist (φ wird nämlich im Bogenmaß gemessen), dreht sich auch der Spiegel und damit das Einfallslot um den Winkel φ; der reflektierte Strahl wird aber um 2φ abgelenkt, da sich der Einfalls- und damit auch der Reflexionswinkel um φ ändert. Für die Auslenkung des Lichtzeigers auf der Wand S gilt dann $2\varphi = S/L$. (Da der Winkel φ sehr klein ist, gilt diese Beziehung in guter Näherung.) Durch Gleichsetzen der Werte von φ ergibt sich $s/e = S/2\,L$ (Abb. 173,2).

Mit den früheren Beziehungen erhalten wir:

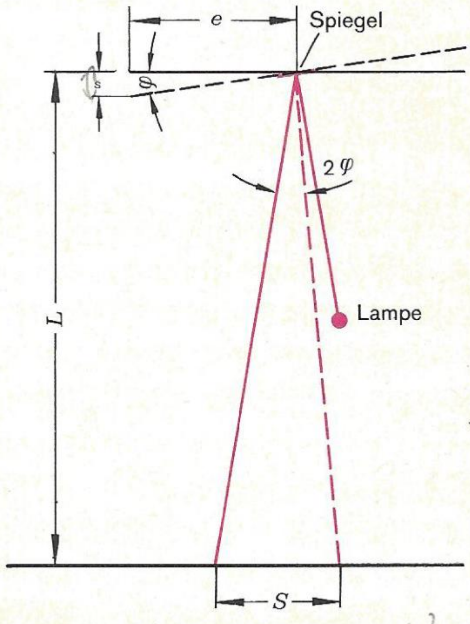
$$s = \frac{S\,e}{2\,L} = \frac{F\,t^2}{m} = f\,\frac{M\,m\,t^2}{m\,r^2}\left(1 - \left(\frac{r}{x}\right)^3\right),$$

wenn wir die beiden Ausdrücke für s gleichsetzen und für F den erhaltenen Wert benutzen. Durch Auflösen nach f ergibt sich:

$$f = \frac{S\,e\,r^2}{2\,L\,M\,t^2\,\left(1 - \left(\frac{r}{x}\right)^3\right)}.$$

Wenn sich die Waage ruhig eingestellt hat und im Gleichgewicht befindet, schwenkt man die Kugeln plötzlich herum und startet gleichzeitig eine Uhr. Für verschiedene Zeiten t liest man auf einer Skala an der Wand die zugehörige Ablenkung S ab. Die Meßergebnisse zeigt Tabelle 174. In der letzten Spalte ist S/t^2 berechnet; an den Werten erkennt man, daß die Annahme einer gleichförmig beschleunigten Bewegung einigermaßen bestätigt wird. Für die Drehwaage wird gemessen und berechnet:

Abb. 173,2. Lichtzeigerablesung bei der Drehwaage



$$b = 2{,}9\text{ cm},\quad d = 6{,}32\text{ cm},\quad r = \frac{b+d}{2} = 4{,}61\text{ cm},\quad e = 5\text{ cm},$$

$$x^2 = 4\,e^2 + r^2 = 121{,}25\text{ cm}^2,\quad x = 11{,}01\text{ cm},$$

$$\frac{r}{x} = 0{,}419,\quad \left(\frac{r}{x}\right)^3 = 0{,}0735,\quad 1 - \left(\frac{r}{x}\right)^3 = 0{,}9265,$$

$$m = 0{,}005\text{ kg},\quad M = 1{,}493\text{ kg},\quad L = 7{,}86\text{ m},\quad e = 0{,}05\text{ m},\quad r = 0{,}0461\text{ m}.$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen der Werte in die hergeleitete Beziehung (für S/t^2 wird dabei der Mittelwert aus Tabelle 174 verwendet):

$$f = \frac{1{,}37\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}05\cdot 0{,}0461^2\text{ m m m}^2}{2\cdot 7{,}86\cdot 1{,}493\cdot 0{,}9265\text{ m kg s}^2} = 6{,}70\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kgs}^2}.$$

Man könnte auch die Drehwaage sich unter dem Einfluß der Gravitationskräfte im Gleichgewicht einstellen lassen. Aus den Ausschlägen kann man die Kräfte bestimmen. Dazu muß man aber die sogenannte Empfindlichkeit der Waage kennen, d. h. das Verhältnis von Kraft und zugehörigem Drehwinkel. Diese Empfindlichkeitsbestimmung würde uns im Augenblick aber sehr große Schwierigkeiten bereiten. Daher wählten wir die etwas ungenauere Methode, die uns jetzt jedoch verständlicher und einfacher zugänglich ist.

Genauere Messungen ergaben den Meßwert:

$$f = 6{,}670\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kgs}^2}. \tag{174}$$

t	S	t^2	S/t^2
s	m	s^2	m/s^2
15	0,003	225	$1{,}33\cdot 10^{-5}$
30	0,012	900	$1{,}33\cdot 10^{-5}$
45	0,029	2025	$1{,}43\cdot 10^{-5}$
60	0,051	3600	$1{,}42\cdot 10^{-5}$
75	0,075	5625	$1{,}33\cdot 10^{-5}$
Mittelwert			$1{,}37\cdot 10^{-5}$

Tabelle 174: Zur Messung der Gravitationskonstanten.