

5.2. Elementarladung nach Millikan

Ziel

Bestimmung der Elementarladung e aus der Bewegung geladener Öltröpfchen unter Einfluss der Erdbeschleunigung und elektrischer Felder.

Hinweise zur Vorbereitung

Die Antworten auf diese Fragen sollten Sie vor der Versuchsdurchführung wissen. Sie sind die Grundlage für das Gespräch mit Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor vor dem Versuch. Informationen zu diesen Themen erhalten Sie in der unten angegebenen Literatur.

- Wie sieht das elektrische Feld eines Plattenkondensators aus?
 - Welche Kraft wirkt auf ein geladenes Öltröpfchen im homogenen elektrischen Feld?
 - Welche sonstigen Kräfte sind in diesem Versuch für die geladenen Öltröpfchen zu berücksichtigen?
- Was ist Viskosität?
 - Was ist Stokes'sche Reibung?
 - Wie lautet das Stokes'sche Reibungsgesetz und was ist die Cunningham'sche Korrektur dieses Gesetzes?
 - Was versteht man unter der mittleren freien Weglänge in Gasen?
 - Warum können Sie die Öltröpfchen beobachten, obwohl diese eigentlich viel zu klein sind?
- Welche anderen Bestimmungsmöglichkeiten der Elementarladung gibt es?
 - Wie funktioniert insbesondere die Bestimmung mittels des faradayschen Gesetzes der Elektrolyse?
 - Wie kann die dafür benötigte Avogadro-Konstante¹ bestimmt werden?

Zubehör

- Öltröpfchenzerstäuber:
Dichte des Öls beim alten Aufbau: $\rho_{\text{Öl}} = 863 \text{ kg/m}^3$,
Dichte des Öls beim neuen Aufbau: 877 kg/m^3 bei $T = 15^\circ\text{C}$, 871 kg/m^3 bei $T = 25^\circ\text{C}$
- zwei Stoppuhren

¹Vor allem in älterer Literatur heißt die Avogadro-Konstante N_A oft Loschmidt-Zahl N_L .

- Komplettaufbau zum Millikan-Versuch mit
 - Plattenkondensator mit Öltröpfchenkammer:
Plattenabstand beim alten Aufbau $d = 3$ mm,
Plattenabstand beim neuen Aufbau $d = 6$ mm
 - verschiebbare Videokamera mit abbildender Linse,
 - unter ca. 60° zur Beobachtungsrichtung abgewinkelter Beleuchtung,
 - und Wasserwaage (im Deckel integriert) zur horizontalen Ausrichtung der Anordnung.
- Videomonitor mit aufgelegtem Raster
- Gleichspannungsnetzgerät (max. ca. 300 V beim alten Aufbau bzw. ca. 580 V beim neuen Aufbau)
- externes Voltmeter beim alten Aufbau (das eingebaute Voltmeter ist da zu ungenau)
- berührungsgeschützte Kabel für die gesamte Schaltung

Grundlagen

Erzeugung der Öltröpfchen und auf sie wirkende Kräfte

In einem Zerstäuber wird Öl in sehr kleine Tröpfchen „zerlegt“. Bei diesem Vorgang verteilen sich die positiven und negativen Ladungen oft nicht gleichmäßig auf die Tröpfchen, so dass viele geladene Tröpfchen entstehen. Die Ladung q beträgt dabei stets ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e . Man bringt ein Tröpfchen der Masse m in das homogene Feld \vec{E} eines Plattenkondensators und lässt es im Gravitationsfeld der Erde fallen. Die viskose Reibung in der Luft (Viskosität η) erzeugt dabei eine der Geschwindigkeit proportionale bremsende Kraft, so dass sich nach kurzer Zeit eine Gleichgewichtsgeschwindigkeit \vec{v} einstellt.

Auf das Tröpfchen wirken dann die folgenden Kräfte:

- Gravitationskraft

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} \quad , \quad (5.2.1)$$

- Stokes'sche Reibungskraft

$$\vec{F}_{R,Stokes} = -6\pi\eta r\vec{v}, \quad (5.2.2)$$

- elektrostatische Kraft

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}. \quad (5.2.3)$$

Die elektrische Kraft $F = -e \cdot E = -e \cdot U/d$ kann bei festem Plattenabstand d über die Spannung U am Kondensator geregelt und vor allem auch umgepolt und ausgeschaltet werden.

Die Stokes'sche Reibungskraft wirkt immer entgegen der Bewegungsrichtung, ändert also ihr Vorzeichen, je nachdem, ob sich das Tröpfchen gerade nach oben oder unten bewegt.

Cunningham-Korrektur

Das Stokes'sche Reibungsgesetz gilt streng nur im Rahmen der Kontinuumsmechanik und daher nicht für allzu kleine Tröpfchen, deren Abmessungen so gering sind, dass ihre mittlere freie Weglänge in Luft nicht mehr vernachlässigbar ist.² Solche Kügelchen können quasi „zwischen den Luftmolekülen hindurchfallen“. Dieser Effekt kann mit einem korrigierten Reibungsgesetz nach Cunningham berücksichtigt werden:

$$F_{R,\text{kor}} = \frac{-6\pi\eta r \cdot v}{1 + A\frac{\lambda}{r}} = \frac{-6\pi\eta r \cdot v}{1 + \frac{B}{p \cdot r}} \quad (5.2.4)$$

mit

$$\begin{aligned} A, B &= \text{empirisch zu bestimmende Konstanten} \\ \lambda &= \text{mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle} \\ p &= \text{Luftdruck} \end{aligned}$$

Zur Anwendung dieser korrigierten Formel muss der Tröpfchenradius eigentlich schon bekannt sein. Um die Rechnung zu vereinfachen, bestimmen wir im Praktikum den Radius zunächst aus der feldfreien Messung ohne die Korrektur, wenden dann aber im nächsten Schritt bei der Messung mit elektrischem Feld die korrigierte Formel an. Wir führen also sozusagen nur eine „Cunningham-Korrektur 1. Ordnung“ durch.

Der Literaturwert (siehe z. B. [Sch88]) für die Cunningham-Konstante B beträgt in Luft

$$B = 6.17 \cdot 10^{-3} \text{ Torr} \cdot \text{cm} \quad . \quad (5.2.5)$$

Messung ohne elektrisches Feld

Die Tröpfchen fallen im Gravitationsfeld der Erde mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 nach unten.³

Aus dem Kräftegleichgewicht

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Öl}} \cdot g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Luft}} \cdot g + 6\pi\eta r \cdot v_0 \quad (5.2.6)$$

folgt für den Tröpfchenradius unmittelbar:

$$r = 3 \cdot \sqrt{\frac{\eta \cdot v_0}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})g}} \quad , \quad (5.2.7)$$

wobei die Geschwindigkeit nach

$$v_0 = s_0/t_0 \quad (5.2.8)$$

als Quotient aus Sinkstrecke s_0 und Sinkzeit t_0 bestimmt werden kann.

²Meist vergleicht man den Radius der Tröpfchen mit der mittleren freien Weglänge der Luftteilchen. Diese beiden Bedingungen liefern sehr ähnliche Ergebnisse.

³In den Gleichungen (5.2.6) bis (5.2.11) bedeuten v_0 , v_{auf} , v_{ab} , U und E jeweils die positiven Beträge der entsprechenden Geschwindigkeiten, der Kondensatorspannung und der elektrischen Feldstärke.

Messung mit elektrischem Feld

Da die Tröpfchen wie bereits erwähnt beim Zerstäuben oft elektrisch geladen werden („Reibungselektrizität“), kann ihre Bewegung durch Anlegen eines elektrischen Feldes beeinflusst werden. Hierzu werden die Tröpfchen der Ladung q in das homogene Feld eines Plattenkondensators gebracht. Dessen Feldstärke E kann über die angelegte Spannung U geregelt werden, denn es gilt bei einem Plattenabstand d :

$$E = U/d \quad . \quad (5.2.9)$$

Ist die elektrische Kraft groß genug, so fallen die Tröpfchen nicht länger nach unten, sondern bewegen sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_{auf} nach oben.

Polte man die Spannung um, so läuft das Tröpfchen schneller nach unten als ohne elektrisches Feld, nämlich mit der konstanten Geschwindigkeit v_{ab} . Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit stellt sich in allen Fällen praktisch sofort ein. Bei der Aufwärtsbewegung gilt das Kräftegleichgewicht

$$q \cdot E - \frac{4}{3}\pi r^3 (\varrho_{\text{Öl}} - \varrho_{\text{Luft}}) g = 6\pi\eta r \cdot v_{\text{auf}} \quad . \quad (5.2.10)$$

Lässt man das Tröpfchen stets ohne elektrisches Feld fallen, so folgt aus den Gleichungen (5.2.6) und (5.2.10) für die Tröpfchenladung

$$q = \frac{18\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3}{(\varrho_{\text{Öl}} - \varrho_{\text{Luft}}) g}} \cdot (v_0 + v_{\text{auf}}) \cdot \sqrt{v_0} \quad . \quad (5.2.11)$$

Ein alternatives Auswertungsverfahren ist in der Fußnote beschrieben.⁴

Die so erhaltenen Werte für die Ladung müssen nach Cunningham noch korrigiert werden. Der Zusammenhang zwischen der unkorrigierten Ladung e und der korrigierten Ladung e_0 lautet:

$$e_0^{2/3} \left(1 + \frac{B}{p \cdot r} \right) = e^{2/3} \quad . \quad (5.2.15)$$

Trägt man für Tröpfchen mit unterschiedlichem Radius jeweils $e^{2/3}$ über $\frac{1}{p \cdot r}$ auf, so erhält man einen linearen Zusammenhang, aus dem sich die Konstante B bestimmen lässt.

⁴Bei der Abwärtsbewegung hat man zwei Möglichkeiten: mit oder ohne Feld. Bei der Auswertung ist die Wahl natürlich entsprechend zu berücksichtigen. Lässt man das Tröpfchen stets ohne elektrisches Feld fallen, so folgt aus den Gleichungen (5.2.6) und (5.2.10) für die Tröpfchenladung Gleichung (5.2.11).

Legt man alternativ auch während der Abwärtsbewegung das elektrische Feld an, so gilt

$$q \cdot E + \frac{4}{3}\pi r^3 (\varrho_{\text{Öl}} - \varrho_{\text{Luft}}) g = 6\pi\eta r \cdot v_{\text{ab}} \quad (5.2.12)$$

und man kann durch Subtraktion bzw. Addition der Gleichungen (5.2.10) und (5.2.12) zunächst den Tröpfchenradius r und anschließend auch die Tröpfchenladung q wie folgt berechnen:

$$r = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\eta}{(\varrho_{\text{Öl}} - \varrho_{\text{Luft}}) g}} \cdot \sqrt{v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}}} \quad (5.2.13)$$

$$q = \frac{9\pi}{2} \cdot \frac{d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3}{(\varrho_{\text{Öl}} - \varrho_{\text{Luft}}) g}} \cdot (v_{\text{ab}} + v_{\text{auf}}) \cdot \sqrt{v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}}} \quad . \quad (5.2.14)$$

Umladung der Tröpfchen

Beobachtet man ein bestimmtes Tröpfchen über längere Zeit, so ändert sich u. U. seine Ladung q . Dabei entspricht die Ladungsänderung stets einem ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung.⁵

Dunkelfeldbeleuchtung

Der Durchmesser der Öltröpfchen liegt im Bereich von $\approx 1\ \mu\text{m}$. Das übersteigt das Auflösungsvermögen üblicher optischer Mikroskope und auch bei Weitem das des eingesetzten Videomikroskops. Bei seitlicher Beleuchtung sind die Tröpfchen durch das an ihnen gestreute Licht trotzdem als helle Punkte vor dunklem Hintergrund⁶ sichtbar. Allerdings hat der scheinbare Durchmesser der Punkte nichts mit dem wahren Tröpfchenradius zu tun. Dieser muss daher unbedingt aus einem „Fallexperiment“ bestimmt werden.

Versuchsdurchführung

Hinweis: Beobachten Sie bevorzugt langsame Tröpfchen, denn bei denen ist die Chance größer, dass sie nur wenige Ladungen tragen und damit die „Stückelung“ der Ladung gut sichtbar wird.

1. Nur beim alten Aufbau: Kontrollieren Sie, dass die enge Verbindungsdüse zwischen Öltröpfchenkammer und Kondensatorvolumen nicht durch Öl verstopft ist. Blasen Sie die Düse falls notwendig mit Druckluft durch (Druckluftanschlüsse finden Sie in den Räumen P610 und P611) und wischen Sie Ölreste mit Papier ab.
2. Überprüfen Sie mit Hilfe der in den Deckel der Öltröpfchenkammer eingelassenen „Libelle“ (Wasserwaage), dass die Anordnung horizontal steht. Wenn Sie am neuen Aufbau messen, leihen Sie sich an dieser Stelle kurz die Wasserwaage vom alten Aufbau, um die Lage zu kontrollieren.
3. Bestimmen Sie den Abbildungsmaßstab, indem Sie die Mikroskopoptik so fokussieren, dass die Vorderkanten der Platten des Plattenkondensators möglichst scharf auf dem Videomonitor zu sehen sind. Der Plattenabstand ist bekannt (siehe oben bei der Zubehörliste), Sie müssen also nur die Größe auf dem Monitor notieren (z. B. in Zentimetern).

Da die Abbildungsoptik mit der Kamera fest verbunden ist und auch mit dieser verschoben wird, bleibt der Abbildungsmaßstab unverändert, auch wenn Sie später nicht mehr auf die Vorderkante der Platten, sondern auf die Öltröpfchen scharfstellen.

4. Stellen Sie am Netzgerät eine Spannung von ca. 180 V ein, legen diese aber zunächst noch nicht an die Kondensatorplatten an (Umpolschalter am Millikangerät).

⁵Werden die Tröpfchen ionisierender Strahlung ausgesetzt, so ändert sich ihre Ladung q sogar noch häufiger. Dies ist aber gar nicht nötig.

⁶Daher kommt die Bezeichnung „Dunkelfeldbeleuchtung“.

5. Nehmen Sie den Deckel der Öltröpfchenkammer ab und blasen mit dem Ölzerstäuber „eine Prise“ Tröpfchen in die Kammer.

Hinweis: Sie brauchen eigentlich nur sehr wenige Tröpfchen. Allzu viel Öl verstopft nur die Düse.

6. Nur beim alten Aufbau: Klopfen Sie leicht mit der flachen Hand auf die Kammer, um durch die kurzzeitige Druckerhöhung einige Tröpfchen in das Kondensatorvolumen zu verschieben.

7. Präparieren Sie ein geeignetes Tröpfchen folgendermaßen heraus:

- Wählen Sie zunächst unter Fokussieren der Mikroskopoptik ein Tröpfchen aus, das sich relativ langsam bewegt. Eine niedrige Geschwindigkeit bedeutet nämlich, dass Radius und Masse klein sind, wodurch dann schon die elektrische Kraft auf nur eine oder wenige Elementarladungen eine mit der Gewichtskraft vergleichbare Größe erreicht.
- Legen Sie probeweise die Spannung mit wechselnder Polarität an die Kondensatorplatten an, um zu sehen, ob das Tröpfchen dabei seine Bewegungsrichtung ändert *und* sich in *beiden* Richtungen mit einer gut messbaren Geschwindigkeit bewegt. Nur dann ist die Ladung weder zu groß noch zu klein.

Wählen Sie ein anderes Tröpfchen, falls nicht alle Bedingungen erfüllt sind.

- Falls das von Ihnen ausgewählte Tröpfchen von zu vielen anderen Tröpfchen umgeben ist, die die Beobachtung erschweren, können Sie zumindest einen großen Teil davon dadurch loswerden, dass Sie „Ihr“ Tröpfchen mehrfach bis knapp an die Kondensatorplatten heranzuführen und erst dann umpolen. Viele der anderen Tröpfchen werden dabei auf den Kondensatorplatten landen.
8. Messen Sie für eine größere Zahl von Tröpfchen jeweils die Fallgeschwindigkeit ohne elektrisches Feld, sowie die Steiggeschwindigkeit mit elektrischem Feld.

Hinweise:

- Die Fallgeschwindigkeit mit Feld ist für die Auswertung nicht unbedingt nötig.
 - Lassen Sie die Tröpfchen so lange wie möglich mehrfach nach oben und unten laufen. Sie können auf diese Weise die effektive Messzeit und -strecke erhöhen, was die Messgenauigkeit verbessert.
 - Die Tröpfchen ändern gelegentlich zufällig ihre Ladung. Notieren Sie daher „Zwischenzeiten“, um diesen Effekt bei der Auswertung berücksichtigen zu können.
9. Vergessen Sie nicht, den Luftdruck am Versuchstag zu notieren.

Auswertung Zur Auswertung werden noch folgende Zahlenwerte benötigt:

- Dichte der Luft $\rho_{\text{Luft}} \approx 1 \text{ kg/m}^3$

- dynamische Viskosität der Luft $\eta = 1.832 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$
 - Für die Cunningham-Konstante dürfen Sie den im Grundlagenteil angegebenen Literaturwert benutzen. Wenn Sie möchten, können Sie allerdings auch aus Messungen an unterschiedlich großen Öltröpfchen die Konstante B selbst bestimmen, indem Sie wie oben bereits erwähnt $e^{2/3}$ über $\frac{1}{p \cdot r}$ auftragen und eine Ausgleichsgerade an die Punkte legen. Deren Steigung ist dann $B \cdot e_0^{2/3}$.
1. Bestimmen Sie Radius und Ladung jedes beobachteten Öltröpfchens.
 2. Tragen Sie die berechneten Ladungen graphisch auf und suchen Sie nach Häufungsbereichen.
 3. Ermitteln Sie hieraus den Wert der Elementarladung e .
 4. Vergleichen Sie mit Hilfe eines Signifikanztests Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert für die Elementarladung (siehe Literaturverzeichnis).

Fragen und Aufgaben

1. Rechnen Sie die oben in der Einheit Torr · cm angegebene Cunningham-Konstante in die SI-Einheit Pa · m um.
2. Was ist Elektrophorese?
3. Was verstehen Sie unter elektrokinetischen Erscheinungen an Membranen (wichtig in der Zellbiologie)?

Ergänzende Informationen

Historisches

Der von R. A. Millikan entwickelte und durchgeführte Versuch bot erstmals die Gelegenheit, die Existenz einer Elementarladung direkt zu beweisen und eröffnete gleichzeitig die Möglichkeit, ihren Wert sehr genau zu bestimmen.

Literaturhinweise

Den jeweils aktuellen Literatur der Elementarladung e finden Sie z. B. auf den Webseiten von CODATA und des NIST [COD98].

Sehr ausführlich: [Sch88] (auch andere Auflagen).

Historische Publikationen von R. A. Millikan: [Mil09, Mil11, Mil13].

In einer Publikation aus dem Jahr 2000 wird dargestellt, wie mit Hilfe einer automatischen Messapparatur über 40 Millionen Tröpfchen vermessen wurden, um evtl. Bruchteile von Elementarladungen zu finden [HKL⁺00].

Literaturverzeichnis

- [COD98] CODATA (COMMITTEE ON DATA FOR SCIENCE AND TECHNOLOGY), NIST (NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY): <http://www.codata.org/>, <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/>, 1998. Datenbank für Fundamentalkonstanten usw.
- [HKL⁺00] HALYO, V., P. KIM, E. R. LEE, I. T. LEE, D. LOOMBA, and M. L. PERL: *Search for free fractional electric charge elementary particles using an automated millikan oil drop technique*. Phys. Rev. Lett., 84(12):2576–2579, 2000.
- [Mil09] MILLIKAN, R. A.: *An new modification of the cloud method of measuring the elementary electrical charge, and the most probable value of that charge*. Phys. Rev., 29(6):560–561, 1909. Abstract of a paper presented at the Princeton meeting of the Physical Society, October 23, 1909; see also Phil. Mag., 19, p. 209.
- [Mil11] MILLIKAN, R. A.: *The isolation of an ion, a precision measurement of its charge, and the correction of STOKES's law*. Phys. Rev., 32(4):349–397, 1911.
- [Mil13] MILLIKAN, R. A.: *On the elementary electrical charge and the Avogadro constant*. Phys. Rev., 2(2):109–143, 1913.
- [Sch88] SCHPOLSKI, E. W.: *Atomphysik*, Band I: Einführung in die Atomphysik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 18. Auflage, 1988. Schreibweise des Autors manchmal auch „Eduard V. Spol'skij“.