

## 1.6 Bestimmung von Atommassen

Demtröder Exp. Phys. 3, Kap. 2.7

Das im Abschnitt 1.1.2 eingeführte Konzept des Mols erlaubt bei Kenntnis der Avogadro-Konstante  $N_A$  sowie der Masse  $M$  eines Mols der zu untersuchenden Atomsorte die Bestimmung der Atommasse  $m_x$  über den Zusammenhang

$$m_x = \frac{M}{N_A}. \quad (22)$$

Kennt man nur die *relative* Massenzahl

$$A = 12 \frac{m_x}{m(^{12}\text{C})} \quad (23)$$

also das Verhältnis der Masse einer Atomsorte  $x$  zu  $\frac{1}{12}$  der Masse eines  $^{12}\text{C}$ -Atoms, so ergibt sich die Masse  $m_x$  eines Atoms aus der Molmasse  $M = N_A \cdot m_x$  (=A Gramm !) und der Avogadro-Konstante  $N_A$  zu

$$m_x = \frac{A \cdot 10^{-3}}{N_A} \text{kg}. \quad (24)$$

Somit lässt sich mit Kenntnis von  $N_A$  und der relativen Atommasse  $A$  die absolute Atommasse  $m_x$  direkt bestimmen.

Für kristalline Strukturen existiert ein weiterer Zugang durch das direkte Abzählen von Atomen. Mit Hilfe von Röntgenbeugungsexperimenten kann man ohne weiteres den Abstand zwischen benachbarten Atomen bestimmen. Aus den Abmessungen des Gesamtkristalls erhält man dadurch die Gesamtzahl  $N$  der im Kristall enthaltenen Atome. Durch Bestimmung der Masse  $M$  des Gesamtkristalls erhält man die Masse  $m_x$  eines einzelnen Kristallatoms über

$$m_x = \frac{M}{N}. \quad (25)$$

Der Nachteil der bisher genannten Zugänge liegt in der hohen Ungenauigkeit und beschränkten Anwendbarkeit der Messverfahren.

Die im folgenden dargelegten Methoden beruhen auf Messung der Ablenkung von Ionen in elektrischen und/oder magnetischen Feldern und bilden den genauesten Zugang zur Atommasse. Dazu werden die zu untersuchenden Atome zunächst ionisiert und anschliessend beschleunigt. Um aus der gemessenen Masse  $m(A^+)$  eines einfach geladenen Ions  $A^+$  auf die Masse des neutralen Atoms

$$m(A) = m(A^+) + m(e^-) - \frac{1}{c^2} E_B \quad (26)$$

zu schliessen, ist es notwendig die Masse eines Elektrons  $m(e^-)$  sowie das Massenäquivalent der Bindungsenergie  $E_B$  dieses Elektrons im Atom  $A$  zu addieren (-> siehe Massendefekt).

### 1.6.1 J.J. Thomson's Parabelspektrograph

Auf eine Ladung  $q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in einem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  und einem Magnetischen  $\mathbf{B}$  bewegt, wirkt die Kraft

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (27)$$

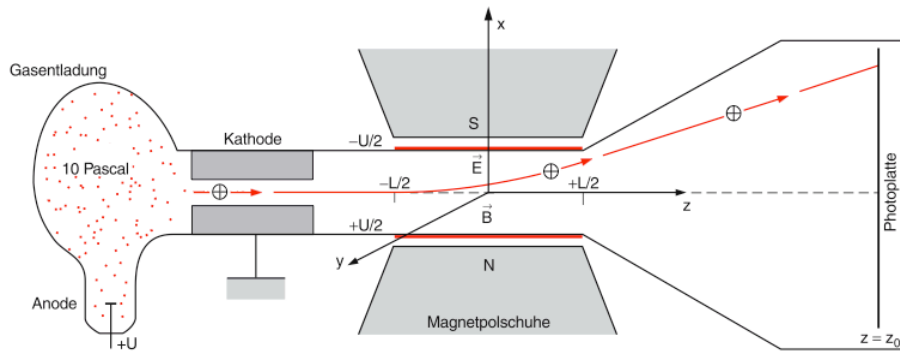


Abbildung 1: Parabelspektrograph nach J.J. Thomson: Ein durch die Anoden-Kathoden Spannung  $U$  beschleunigtes, ein die Ladung  $q$  tragendes Teilchen erreicht mit einer Geschwindigkeit von  $v = (2qU/m)^{1/2}$  ein homogenes Magnetfeld  $\mathbf{B} = \{B_x, 0, 0\}$  das parallel von einem homogenen elektrischen Feld  $\mathbf{E} = \{E_x, 0, 0\}$  überlagert ist.

Nach Gleichung 27 ergeben sich für die experimentelle Situation in Abb. 1.6.1 die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} E_x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q}{m} v \cdot B_x. \quad (28)$$

Durch Substitution der Zeitabhängigkeit  $dt$  in 28 durch die Ortsabhängigkeit  $dz$  und anschließender Integration gelingt es, die Koordinaten  $\{x, y\}$  an denen die Ionen auf die Photoplatte treffen zu berechnen. Sei gemäss der Abb. 1.6.1 die Photoplatte in einer Entfernung  $z = z_0$  angebracht, so gilt

$$x(z_0) = \frac{qE_x L}{mv^2} z_0 \qquad y(z_0) = \frac{qB_x L}{mv} z_0. \quad (29)$$

Die Lösungen 29 zeigen, dass Ionen mit gleichem Verhältnis von Ladung zu Masse  $q/m$  auf den selben Punkt  $(x(z_0), y(z_0))$  der Photoplatte abgebildet werden, solange sie den Parabelspektrographen mit der gleichen Geschwindigkeit  $v = (2qU/m)^{1/2}$  in  $z$ -Richtung durchlaufen haben. Da, wie in Abb. 1.6.1 dargestellt, die Ionen beim Thomsonschen Massenspektrographen durch eine Gasentladung erzeugt werden, haben diese unterschiedliche Geschwindigkeiten  $v$  in  $z$ -Richtung. Möchte man die Auftreffpunkte  $\{x, y\}$  für alle Ionen mit gleichem  $q/m$ -Verhältnis wissen, so muss die Geschwindigkeitsabhängigkeit  $v$  in den Gleichungen 29 eliminiert werden:

$$\begin{aligned} x(z_0) &= \frac{m}{q} \frac{E}{B^2 L z_0} y^2 \\ &= a(m) y^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Diese Gleichung besagt, dass alle Ionen mit dem gleichen Wert  $q/m$  auf Punkte entlang einer Parabel  $x = a \cdot y^2$  auf dem Photoschirm abgebildet werden. Bei bekannten Werten  $E$  und  $B$  kann somit das Verhältnis  $q/m$  bestimmt werden (Siehe Abb. 1.6.1).

Beim Thomson-Parabelspektrograph werden gleiche Massen mit verschiedenen Geschwindigkeiten auf verschiedene Stellen der Photoplatte (entlang der entsprechenden Parabel für

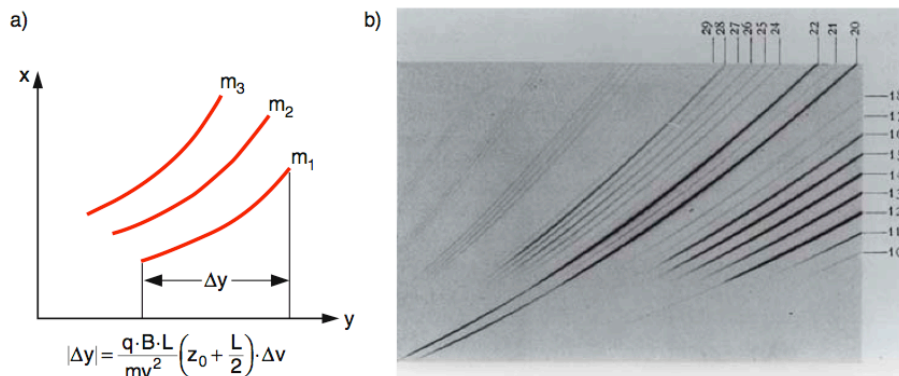


Abbildung 2: (a) Statt mit einer einzigen Geschwindigkeit  $v$ , erreichen Ionen den Massenspektrographen innerhalb eines gewissen Geschwindigkeitsintervalls  $\Delta v$ . Dies führt zur Abbildung gleicher Ionen auf eine Parabel. (b) Messung verschiedener Neon-Isotope aus einer isotopenangereicherten Neonentladung, der noch Wasserdampf und Benzol beigemischt ist.

einen festen Wert von  $q/m$  abgebildet. Aus Intensitätsgründen ist es erwünscht, alle Ionen gleicher Masse (trotz verschiedener Geschwindigkeiten) auf einen Punkt (z.B. die Eintrittsblende eines Ionen-Detektors) zu fokussieren. Dies wird **Geschwindigkeitsfokussierung** genannt und wurde erstmals durch einen Aufbau von *Francis William Aston* realisiert bei dem das elektrische Feld und das magnetische räumlich getrennt sind.

Zu Beginn wurde angenommen, dass alle vermessenen Ionen anfänglich nur eine Geschwindigkeitskomponente in  $z$ -Richtung ( $v_z$ ) besitzen ( $v_x = 0$  und  $v_y = 0$ ), also ein parallel in  $z$ -Richtung ausbreitender Ionen-Strahl. Durch die geeignete Anordnung von Blenden kann dies auch annähernd realisiert werden, allerdings verliert man dadurch stark an Intensität, weil die aus der Ionenquelle austretenden Ionen auch Querkomponenten  $v_x$  und  $v_y$  besitzen. 1918 realisierte *Arthur Jeffrey Dempster* ein magnetisches  $180^\circ$ -Massenspektrometer das Ionen mit verschiedenen Richtungen in den Anfangsgeschwindigkeiten wieder refokussiert. Durch diese **Richtungsfo-kussierung** können auch kleinere Mengen von Ionen identifiziert werden, da diese nach der Refokussierung zum Detektionssignal beitragen können.

### 1.6.2 Flugzeit Massenspektrometer

- Das Flugzeit-Massenspektrometer nutzt die für Ionen mit der Ladung  $q$  und verschiedenen Massen  $m$  unterschiedliche Flugzeit  $t$  durch eine feldfreie Strecke  $L$ .
- Funktionsprinzip: Innerhalb eines begrenzten Raumgebietes  $V$  werden Ionen erzeugt und durch eine Spannung  $U$  auf  $v = (2qU/m)^{1/2}$  beschleunigt. Anschließend durchlaufen sie eine feldfreie Strecke  $L$ , bevor sie von einem Detektor registriert werden.
- Das Zeitintervall zwischen Ankunftszeit  $t = T_m$  eines Ions und seiner Erzeugung zur Zeit  $t = 0$  ergibt sich wegen

$$T_m = L/v = \frac{L}{\sqrt{2qU/m}} \quad (31)$$

seine Masse  $m$  aus der gemessenen Flugzeit  $T_m$  zu:

$$m = \frac{2qU}{L^2} \cdot T_m^2. \quad (32)$$

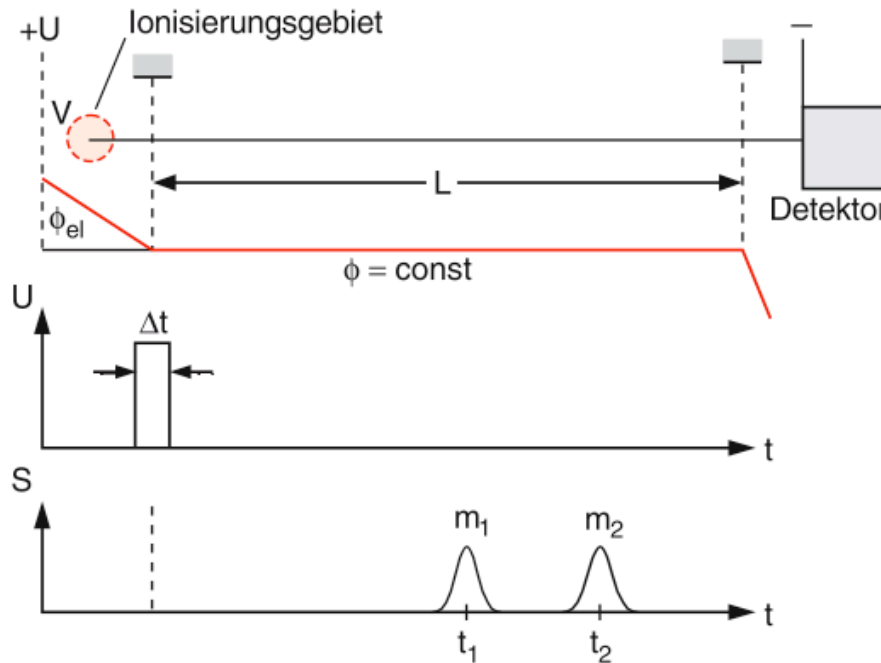


Abbildung 3: Prinzip des Flugzeitmassenspektrometers

- Genauigkeit der Massenbestimmung hängt ab von der Genauigkeit, mit der Flugstrecke  $L$ , Flugzeit  $T_m$  und Beschleunigungsspannung  $U$  gemessen werden können.
- Die Ionen entstehen nicht alle am gleichen Ort, sondern in einem ausgedehnten Gebiet, in dem das elektrische Potential  $\Phi_{el}$ , das durch die Beschleunigungselektrode erzeugt wird nicht konstant ist. D.h. die Ionen erhalten, je nach ihrem Entstehungsort eine etwas unterschiedliche kinetische Energie, also unterschiedliche Geschwindigkeiten. Auch dies führt zu Ungenauigkeiten in den Messungen (-> Abhilfe: Flugzeitspektrometer von McLaren)
- Erlaubt das gleichzeitige Messen verschiedener Massenkomponenten
- Auch sehr große Massen (bis  $10^5$  AME), die dann eine entsprechend lange Flugzeit haben
- Das Flugzeitspektrometer ist einfach zu bauen und billiger als andere Massenspektrometer

### 1.6.3 Quadrupol Massenspektrometer

- Das Quadrupol-Massenspektrometer benutzt ein elektrisches, hyperbolisches Potential

$$\Phi(x, z) = \frac{\Phi_0}{2r_0^2}(x^2 - z^2) \quad (33)$$

welches nicht axialsymmetrisch ist und durch vier hyperbolisch geformte Elektroden erzeugt werden kann.

- Die an den Elektroden angelegte Spannung  $\Phi_0$  setzt sich zusammen aus einer konstanten Spannung  $U_{const} = U$  sowie einer überlagerten Wechselsspannung  $U_{dynamic} = V \cdot \cos(\omega t)$

$$\Phi_0(t) = U_{const} + U_{dynamic} = U + V \cdot \cos(\omega t) \quad (34)$$

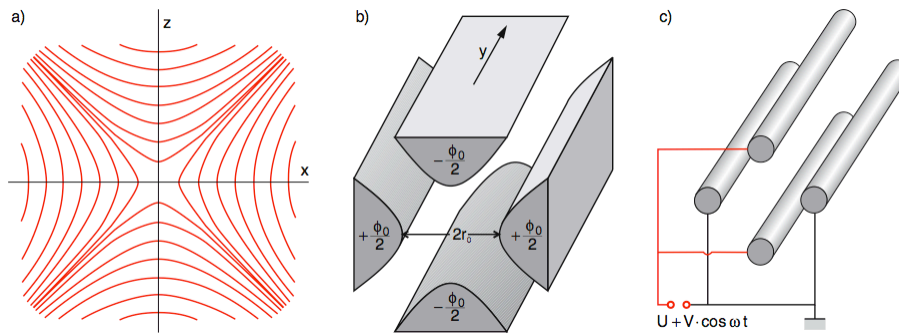


Abbildung 4: Quadrupolmassenspektrometer. (a) Äquipotentiallinien; (b) hyperbolische Elektroden; (c) in der Praxis verwendete runde Stäbe

- Werden nun in Richtung der y-Achse Ionen eingeschossen, können nur Ionen mit bestimmten  $m/q$  Verhältnissen das Potential durchlaufen, ohne mit einer der Elektroden zu kollidieren. Diese werden in einem Detektor am Ende des Quadrupols registriert.

#### 1.6.4 Zyklotron-Resonanz Spektrometer

- Ionen-Zyklotron-Resonanz Spektrometer bieten derzeit genaueste Möglichkeit der Absolutmassenbestimmung ( $m/\Delta m > 10^8$ )
- Die zu untersuchende Ionen wird zunächst in einer Penningfalle bei niedrigem Druck ( $< 10^{-6} Pa$ ) gefangen.

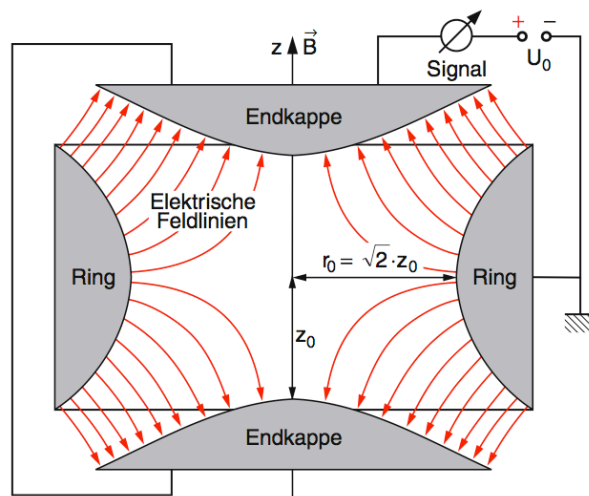


Abbildung 5: Prinzip einer Penningfalle: . Das elektrische Feld (rot) wird erzeugt durch einen Quadrupol aus Endkappen und Ringelektrode, das magnetische Feld (schwarz) durch eine (nicht gezeigte) Zylinderspule. Das homogene Magnetfeld zwingt Ionen aufgrund der Lorentzkraft auf Kreisbahnen (radiale Bewegungseinschränkung). Das elektrische Feld schränkt die Bewegung der Ionen in axialer Richtung ein durch elektrostatische Abstoßung ein.

- Die Bahnen geladener Teilchen in einem homogenen Magnetfeld können durch Spiralen mit dem Radius

$$R = m \cdot v / q \cdot B \quad (35)$$

beschrieben werden. Die vom Radius unabhängige Umlaufkreisfrequenz

$$\omega_z = \frac{q \cdot B}{m} \quad (36)$$

heißt Zyklotronfrequenz

- Das rotationssymmetrische elektrische Feld hat die Komponenten

$$E_r = \frac{U_0}{2z_0^2} r, \quad E_z = -\frac{U_0}{z_0^2} z \quad (37)$$

Ionen vollführen harmonische Schwingungen in z-Richtung aufgrund der durch das E-Feld verursachten rücktreibenden Kräfte in z-Richtung.

- Durch Überlagerung von Magnetfeld und elektrischem Feld werden Ionen in alle Richtungen stabilisiert. Die nun komplizierteren Bewegungen können in Zyplotronbewegung (Kreis um die z-Richtung) und eine Bewegung in der x-y Ebene, der sogenannten Magnetronbewegung

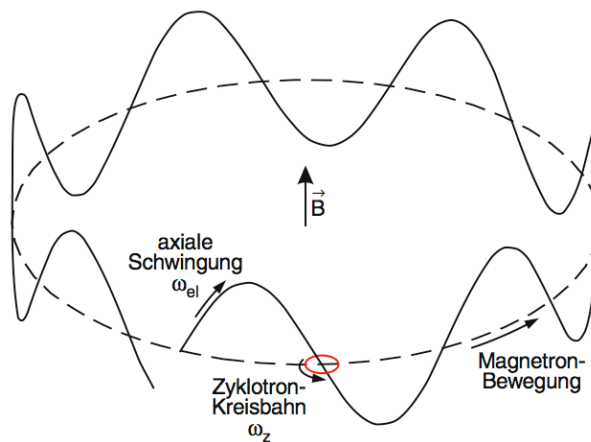


Abbildung 6: Zerlegung der Bahnbewegung eines Ions in Zyklotronbewegungen, die axiale Schwingung und die Drift des Kreismittelpunktes um die Magnetfeldrichtung

- Die Kreisfrequenz dieser periodischen Ionenbewegung ist

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_z}{2}\right)^2 - \frac{\omega_{el}^2}{2}} \quad (38)$$

wobei  $\omega_z$  die Zyklotronfrequenz ist und  $\omega_{el}$  die Frequenz der durch die rücktreibende elektrische Kraft bedingten axialen Oszillationen

- Die Ionenbewegung induziert in den Polkappen eine elektrische Wechselspannung  $U(t)$ , die einerseits zum Nachweis dieser Bewegung und andererseits zur Messung der von der Masse abhängigen Frequenz  $\omega_{\pm}$  dient.
- Die Fouriertransformierte

$$U(\omega - \omega_{\pm}) = \int U(t) e^{i(\omega - \omega_{\pm})t} dt \quad (39)$$

der gemessenen Spannung  $U(t)$  zeigt scharfe Maxima bei  $\omega = \omega_+$  und  $\omega = \omega_-$ , aus denen die genaue Bestimmung der Zyklotronfrequenz  $\omega_z$  und damit der Masse  $m$  (bei bekannter Magnetfeldstärke  $\mathbf{B}$ ).

## 1.6.5 Isotope

Durch die Messung der Atommassen mit Hilfe von Massenspektrometern zeigte sich, dass viele chemische Elemente in der Natur als Gemisch aus Anteilen mit etwas verschiedenen Massen vorkommen. Diese verschiedenen *Isotope* eines Elements besitzen zwar identische, chemische Eigenschaften, unterscheiden sich aber in ihrer Masse um kleine ganzzahlige Vielfache einer atomaren Masseneinheit (AME).

Man schreibt die Massenzahl eines chemischen Elementes oben links vor das chemische Symbol. Die Ladungszahl (=Zahl der Elektronen bzw. Protonen), welche die chemischen Eigenschaften des Elements bestimmt, wird unten links notiert.  ${}^{37}_{17}\text{Cl}$  ist somit ein Chlorisotop mit 17 Elektronen/Protonen und einer atomaren Massenzahl von 37.

D.h., dass das Isotop im Kern neben 17 Protonen noch  $37 - 17 = 20$  Neutronen besitzt. Isotope unterscheiden sich nur in der Anzahl der Neutronen im Kern voneinander.

## 1.7 Bestimmung der Struktur von Atomen

*Demtröder Exp. Phys. 3, Kap. 2.8*

Bis zum Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts war über den Aufbau von Atomen nur sehr wenig bekannt. Zwar wusste man wie groß und schwer Atome sind und dass diese aus Elektronen mit negativer Ladung und kleiner Masse und aus positiven Ladungen mit mehr als tausendmal größeren Massen aufgebaut sind, allerdings dauerte es bis 1911 bis *Rutherford* durch Streuveruche die Ladungsverteilung im Atom klären konnte.

Der genaue Verlauf des Wechselwirkungspotentials zwischen zwei Atomen A und B, welches von der Ladungsverteilung der Elektronen in A und B abhängt kann durch Streuveruche bestimmt werden.

### 1.7.1 Integraler Streuquerschnitt

- Teilchen der Sorte A mit einer Teilchenflussdichte  $\dot{N}$  Teilchen pro Zeit- und Flächeneinheit laufen in x-Richtung durch eine Schicht der Dicke  $dx$  bestehend aus Atomen B mit der Teilchenzahldichte  $n_B$ . Durch die Wechselwirkung zwischen A und B wird ein Teil  $dN$  der einfallenden Teilchen A aus ihrer ursprünglichen Bahn abgelenkt (gestreut).
- Die Größe der Ablenkung hängt vom Wechselwirkungspotential  $V(r)$  zwischen A und B ab, von der Entfernung  $r$  zwischen A und B, von den Massen  $m_A, m_B$  und von der Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ .
- Wenn die Zahl  $n_B \cdot dx$  der streuenden Atome B pro Flächeneinheit genügend klein ist, wird jedes Atom A an höchstens einem Atom B so nahe vorbeifliegen daß es merklich abgelenkt wird (Einfachstreuung).
- Der integrale Wirkungs- oder Streuquerschnitt  $\sigma$  für die Streuung von Atomen der Sorte A an Atomen der Sorte B ist diejenige Fläche  $\sigma = \pi r^2$  um ein Atom B, durch die ein Teilchen A fliegen muss, damit es um einen Winkel  $\theta$ , der größer ist als ein minimaler noch nachweisbarer Winkel  $\theta_0$  abgelenkt wird. Entlang der Strecke  $dx$  ändert sich die Zahl der Teilchen A durch Ablenkung um Winkel  $\theta \geq \theta_0$  um

$$d\dot{N} = -\dot{N} \cdot \sigma \cdot n \cdot dx \quad (40)$$

- Die Zahl der Atome die nach einer Strecke  $x$  im Strahl verbleiben, also nicht gestreut wurden ergibt sich nach Integration zu

$$\dot{N} = \dot{N}_0 \cdot e^{-n\sigma x} \quad \text{mit} \quad \dot{N}_0 = \dot{N}(x = 0) \quad (41)$$

- Der integrale Streuquerschnitt  $\sigma$  hängt mit der mittleren freien Weglänge  $\Lambda$  zusammen über die Relation

$$\Lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma} \quad (42)$$

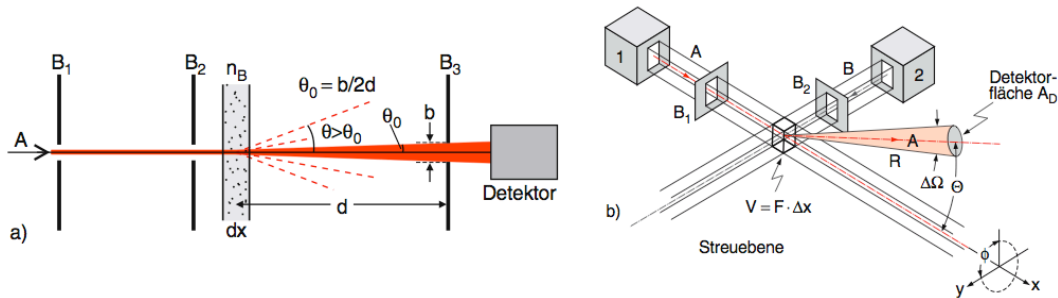


Abbildung 7: a) Bestimmung des integralen Streuquerschnitts: Ein Teilchenstrahl, bestehend aus Ionen der Sorte A wird über die Blenden  $B_1$  und  $B_2$  kollimiert und tritt durch eine Folie aus Atomen der Sorte B. Hinter der Blende  $B_3$  sitzt der Detektor für Teilchen A, die nur dann registriert werden können wenn sie um weniger als  $\theta_0 = b/2d$  abgelenkt wurden. b) Bestimmung des differentiellen Streuquerschnitts: Zwei durch die Blenden  $B_1$  und  $B_2$  kolimierte Teilchenstrahlen bestehend aus Teilchen A und Teilchen B kreuzen sich im Streuvolumen  $V = F \cdot \Delta x$ . Die in den Raumwinkel  $\Delta\Omega$  gestreuten Teilchen werden durch einen Detektor erfasst.

- Bei der Bestimmung des integralen Streuquerschnittes  $\sigma$  misst man also die Abnahme der nicht abgelenkten Teilchen.

### 1.7.2 Differentieller Streuquerschnitt

- Sei  $\dot{N} \cdot F$  die Zahl der pro Sekunde auf die Querschnittsfläche  $F$  des Streuvolumens  $V$  eintreffenden Teilchen und  $\Delta\dot{N}(\theta, \Omega)$  die Zahl der pro Sekunde in den Raumwinkel  $\Delta\Omega$  um den Winkel  $\theta$  gestreuten Teilchen.
- Der Bruchteil

$$\frac{\Delta\dot{N}}{\dot{N} \cdot F} = \frac{n_B}{F} \cdot V \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega = n_B \cdot \Delta x \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \quad (43)$$

aller einfallenden Teilchen, der in den vom Detektor erfassten Raumwinkel  $\Delta\Omega$  gestreut wird, ist dann durch die Teilchendichte  $n_B$  der Streuer, die Länge  $\Delta x$  des Streugebietes und den differentiellen Streuquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$  bestimmt.

- Der differentielle Streuquerschnitt enthält Informationen über das Wechselwirkungspotential  $E_{pot}(r)$  zwischen den Teilchen A und B im Abstand  $r$ . Die klassische Streutheorie liefert für ein Teilchen der Anfangsenergie  $E_0$  und Stoßparameter  $b$  den Ablenkwinkel  $\vartheta$

$$\vartheta(E_0, b) = \pi - b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{E_{pot}(r)}{E_0} \right]^{1/2}} \quad (44)$$

- Dabei kann als untere Integrationsgrenze  $r_{min} = \frac{b}{[1 - E_{pot}(r_{min})/E_0]^{1/2}}$  angenommen werden
- Bei der Bestimmung des differentiellen Streuquerschnitts werden also Teilchen detektiert die um einen Winkel  $\theta$  abgelenkt wurden



### 1.7.3 Bestimmung der Ladungsverteilung im Atom aus Streuexperimenten

- Um die Ladungsverteilung in den Atomen zu bestimmen, ist es zweckmäßig, bei Streuexperimenten elektrisch geladene Partikel A mit der Ladung  $q_1$  als Sonden zu verwenden, weil dann die bekannte Coulombwechselwirkungskraft

$$\mathbf{F}_C(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (45)$$

zwischen dem Teilchen A und der Ladung  $q_2 = \rho_{el} \cdot \Delta V$  im Volumenelement  $\Delta V$  des Atoms die Ablenkung von A bewirkt und man deshalb aus der gemessenen Winkelverteilung  $N_A(\vartheta)$  auf die Ladungsverteilung  $\rho_{el}(\mathbf{r})$  schließen kann.

- Als geladene Teilchen bieten sich  $\alpha$ -Teilchen mit der Ladung  $q_1 = +2e$  und der Masse  $m_{He}$ . Schießt man solche Teilchen auf Atome B, so werden die Elektronen der Atome wegen ihrer kleinen Masse nur sehr wenig zur Ablenkung der  $\alpha$ -Teilchen beitragen. Die Ablenkung wird also im wesentlichen durch die Verteilung der massereichen positiven Ladungsträger bewirkt. Daher gibt die Messung der gestreuten  $\alpha$ -Teilchen Aufschluss über die räumliche Verteilung der positiven Ladungen im Atom. Die Berücksichtigung der Elektronen gibt lediglich eine kleine Korrektur.

### 1.7.4 Vom Thomson'schen zum Rutherford'schen Atommodell

- Am Anfang des letzten Jahrhunderts war über den Aufbau von Atomen nur sehr wenig bekannt. Zwar wusste man, dass jedes Atom aus  $Z$  Elektronen der Ladung  $-Z \cdot e$  und  $Z$  positiven Ladungen mit der Ladung  $+Z \cdot e$  besteht und daher insgesamt neutral ist, wie diese Ladungen aber im Atom verteilt sind war weitestgehend unbekannt.
- *J.J. Thomson* schlug zunächst ein einfaches Atommodell vor, in dem alle zum Atom gehörigen Ladungen statistisch gleichmäßig über das gesamte Atomvolumen verteilt sind.

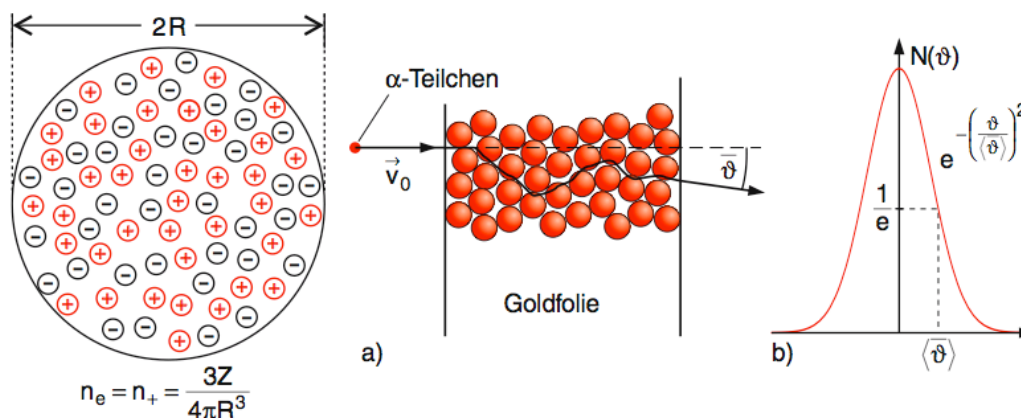


Abbildung 8: links: Von Thomson vorgeschlagenes, sog. Rosinenkuchen Atommodell indem alle Ladungen homogen über das Atomvolumen verteilt sind. **a und b)** Es kann gezeigt werden, dass die Mehrfachstreuung eines  $\alpha$ -Teilchens innerhalb einer Goldfolie nur zu kleinen Ablenkwinkel  $\bar{\vartheta}$  führt.

- Die Ergebnisse von Rutherford durchgeführten Streuexperimente waren nicht in Einklang mit den Vorhersagen des Thomson'schen Atommodell zu bringen. Vor allem die Beobachtung von Streuwinkeln bis zu  $\vartheta = 180^\circ$  waren völlig widersprüchlich zu Thomson's Modell.

- Ausweg: Rutherford kam zu dem Schluss, dass die Ergebnisse der Streuexperimente nur erklärt werden kann, wenn alle positiven Ladungen in einem sehr kleinen Volumen (im vgl. zum gesamten Volumen des Atoms) im Zentrum des Atoms komprimiert sind. Die  $\alpha$ -Teilchen werden praktisch nur vom Atomkern abgelenkt, weil die Massen der Elektronen sehr klein sind gegen die der  $\alpha$ -Teilchen.
- Die aus den Annahmen dieses Modell resultierende, berühmte Rutherford'schen Streuformel

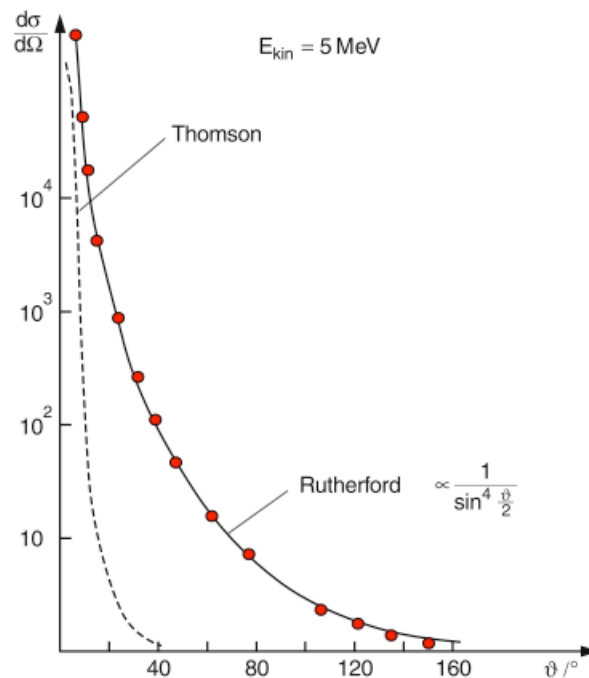
$$\frac{\Delta \dot{N}}{\dot{N}_0 \cdot F} = \frac{n_{\text{Gold}} \cdot \Delta x}{4R^2} \left( \frac{q \cdot Q}{8\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}} \right)^2 \cdot \frac{\Delta A_D}{\sin^4 \vartheta/2} \quad (46)$$

(mit der Ladung  $q = 2e$  der  $\alpha$ -Teilchen, der Kernladung  $Q = Z \cdot e$ , der Detektorfläche  $\Delta A_D$ , der kinetischen Energie der  $\alpha$ -Teilchen  $E_{\text{kin}}$ ) stimmt mit den Ergebnissen der Streuexperimente gut überein.

Dabei gilt die aus der Streutheorie ableitbare Beziehung

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{q \cdot Q} \cdot \mu \cdot v_0^2 \cdot b \quad (47)$$

die den Stoßparameter für verschiedene Atome berechenbar macht.



**Abb. 2.88.** Vergleich zwischen den experimentellen Ergebnissen Rutherfords (Kreise), dem berechneten Wirkungsquerschnitt für Coulombstreuung und dem Streuquerschnitt des Thomson-Modells

## 1.8 Beispielaufgabe

**Streuung von Alpha-Teilchen an einer Goldfolie**  
 $\alpha$ -Teilchen mit  $E_{\text{kin}} = 5 \text{ MeV}$  werden in einer Goldfolie gestreut.

- Wie groß ist der Stoßparameter  $b$  bei einem Streuwinkel  $\vartheta = 90^\circ$ ?
- Wie groß ist  $r_{\text{min}}$  für Rückwärtsstreuung ( $\vartheta = 180^\circ$ )?
- Welcher Bruchteil aller  $\alpha$ -Teilchen wird um Winkel  $\vartheta \geq 90^\circ$  gestreut bei einer Goldfolie mit Dicke  $5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  ( $\rho = 19,3 \text{ g/cm}^3$ ,  $M = 197 \text{ g/mol}$ )?
- Welcher Bruchteil wird in den Winkelbereich  $45^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ$  gestreut?

**Lösung:**

- a) Stoßparameter nach (47)

$$b = \frac{q \cdot Z \cdot e}{4\pi\epsilon_0\mu v_0^2} \cot(\vartheta/2),$$

$$q = 2e, \quad Z = 79,$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm},$$

$$\cot 45^\circ = 1, \quad \frac{\mu}{2} v_0^2 = 5 \text{ MeV} = 8 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\Rightarrow b = 2,27 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 22,7 \text{ Fermi}.$$

- b) Für Rückwärtsstreuung gilt am Umkehrpunkt  $r_{\text{min}}$ :

$$\frac{\mu}{2} v_0^2 = \frac{q \cdot Z e}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{min}}}$$

$$\Rightarrow r_{\text{min}} = \frac{q \cdot Z \cdot e}{2\pi\epsilon_0\mu v_0^2} = 4,54 \cdot 10^{-14} \text{ m}.$$

Der minimale Abstand bei der Rückwärtsstreuung ist also doppelt so groß wie der Stoßparameter  $b$

bei Streuung um  $\vartheta = 90^\circ$ . Der minimale Abstand für  $\vartheta = 90^\circ$  ist aber größer als  $r_{\text{min}}(\vartheta = 180^\circ)$ .

c) Der Stoßparameter für  $\vartheta = 90^\circ$  ist  $b_0 = 2,27 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ . Alle Teilchen mit  $b \leq b_0$  werden in den Winkelbereich  $\vartheta > 90^\circ$  gestreut. Um den maximalen Stoßparameter (d. h. minimalen Ablenkwinkel  $\vartheta_{\text{min}}$ ) zu bestimmen, setzen wir  $b_{\text{max}}$  gleich dem halben mittleren Atomabstand  $\bar{b}/2$  der streuenden Goldatome.

Die Zahl der Goldatome pro  $\text{cm}^3$  ist mit  $\rho = 19,3 \text{ g/cm}^3$ ,  $N_A = 6 \cdot 10^{23} / \text{mol}$ ,  $M = 197 \text{ g/mol}$

$$n_V = \frac{\rho \cdot N_A}{M} = 6 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3.$$

Die Zahl der Atome pro  $\text{cm}^2$  in der Goldfolie mit Dicke  $d = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  ist  $n_F = n_V \cdot d = 3 \cdot 10^{19} / \text{cm}^2$ . Mit  $b_{\text{max}} = \frac{1}{2} \bar{b} = \frac{1}{2} / \sqrt{n_F} = 9,1 \cdot 10^{-11} \text{ cm} = 9,1 \cdot 10^{-13} \text{ m}$  wird der Wirkungsquerschnitt jedes Atoms für  $\vartheta \leq 180^\circ$  dann

$$\sigma = \pi b_{\text{max}}^2 \approx 2,6 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^2.$$

Der Bruchteil der in den Winkelbereich  $\vartheta \geq 90^\circ$  gestreuten  $\alpha$ -Teilchen ist

$$\frac{N(\vartheta \geq 90^\circ)}{N(\vartheta \leq 180^\circ)} = \frac{\pi b_0^2}{\pi b_{\text{max}}^2} = \left( \frac{2,27 \cdot 10^{-14}}{9,1 \cdot 10^{-13}} \right)^2 = 6 \cdot 10^{-4}.$$

d)  $b(\vartheta = 45^\circ) = a \cdot \cot 22,5^\circ = 2,71 a$  mit  $a = qZe / (4\pi\epsilon_0\mu v_0^2)$ ,  $a = 2,27 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ .

$$\frac{N(45^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ)}{N(\vartheta \leq 180^\circ)} = \frac{\pi [(2,71)^2 a^2 - a^2]}{\pi b_{\text{max}}^2} = \frac{6,34 a^2}{b_{\text{max}}^2} = \frac{6,34 \cdot 2,27^2 \cdot 10^{-28}}{10^{-20}} = 3 \cdot 10^{-7}.$$